

מבחן מתכונות במתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: **ארבע שעות**. (עפ"י הנחיות מעודכנות)
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
פרק ראשון - אלגברה והסתברות
פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
חורף תשפ"ב: פותרים חמש שאלות ללא הגבלת בחירה מכל הטופס.
 20×5 – 100 נקודות
סה"כ – 100 נקודות
ג. חומר עזר מותר לשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכונות במחשבון הניתן לתכונות.
(2) דפי נוסחאות רשמיים של משרד החינוך התואמים למספר השאלון.
ד. הוראות מיוחדות:
(1) הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
(2) יש לכתוב בעט כחול או שחור בלבד.
(3) יש לרשום את שם התלמיד ושם המורה על כל דף אשר מוגש.
ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ה ש א ל ו ת

- ענה על חמש מבין השאלות 1-8 (לכל שאלה 20 נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, תיבדקנה רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

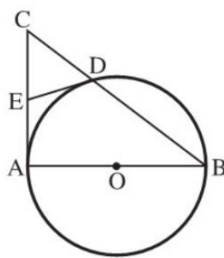
פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. נהג יצא מעיר A לכיוון עיר B. המרחק בין שתי הערים הוא 120 ק"מ. בהתחלה נסע הנהג במהירות קבועה כפי שתכנן, אבל כעבור $\frac{3}{4}$ שעה מתחילת נסיעתו הייתה תקלה ברכבו. הנהג חזר מיד לכיוון A, ונסע 10 ק"מ במהירות של 50 קמ"ש עד למוסך הנמצא בדרך ל-A. המוסך טיפל בתקלה במשך 33 דקות, ומיד לאחר הטיפול יצא הנהג לכיוון B במהירות הקטנה ב-10 קמ"ש ממהירות נסיעתו עד התקלה. הוא הגיע ל-B באיחור של שעה אחת לעומת השעה המתוכננת. מה הייתה מהירות הנסיעה של הנהג עד התקלה?

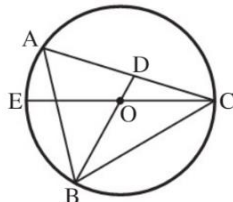
2. נתונה סדרה a_n : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$
ונתונה סדרת הסכומים S_n : $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$
 S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .
סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$.
א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .
ב. נתון כי $|b| < 1$.
בונים מהסדרה a_n שתי סדרות הנדסיות, I ו-II:
I. $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, \dots$
II. $a_1, -a_3, a_5, -a_7, \dots$
T הוא הסכום של אין-סוף איברי הסדרה I,
M הוא הסכום של אין-סוף איברי הסדרה II.
הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

3. בוחרים באקראי 4 אנשים מעיר גדולה. ההסתברות שארבעתם הם בעלי השכלה גבוהה היא 0.0256. ההסתברות לבחור באקראי אדם שמרכיב משקפיים מבין בעלי השכלה גבוהה בעיר קטנה פי 2 מההסתברות לבחור באקראי אדם שמרכיב משקפיים מבין אלו שאינם בעלי השכלה גבוהה.
א. ידוע שאדם מהעיר מרכיב משקפיים. מה ההסתברות שהוא בעל השכלה גבוהה?
ב. בוחרים באקראי 3 אנשים מבין תושבי העיר שאינם בעלי השכלה גבוהה. ההסתברות ששלושתם אינם מרכיבים משקפיים היא $\frac{27}{64}$. מהי ההסתברות שאדם בעיר מרכיב משקפיים והוא גם בעל השכלה גבוהה?
ג. חשב את אחוז מרכיבי המשקפיים בעיר.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



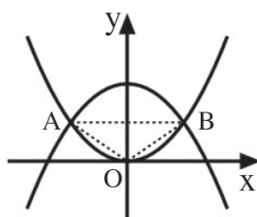
4. במשולש ישר זווית ABC ($\angle BAC = 90^\circ$) הניצב AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O . היתר BC חותך את המעגל גם בנקודה D . המשיק למעגל בנקודה D חותך את הניצב AC בנקודה E .
א. הוכח: $CE = EA$.
ב. נתון: $\frac{CD}{EA} = \frac{4}{3}$ וכן ששטח המשולש CDE הוא 4 סמ"ר. מצא את שטח המשולש ABD . נמק.



5. משולש חד זווית ABC חסום במעגל שמרכזו O . CE הוא קוטר במעגל. המשיך הרדיוס BO חותך את הצלע AC בנקודה D כמתואר בציור.
נתון: $\angle ABD = \alpha$, הקשת $\widehat{BC}$ גדולה פי 2 מהקשת $\widehat{EB}$.
א. חשב את גודל הזווית BAC .
ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש BAD לשטח המשולש BAC .
ג. נתון גם: $\frac{AD}{AB} = \frac{5}{8}$. מצא את α .

**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש, ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונות שתי פונקציות:
- $$f(x) = ax^2, a > 0$$
- $$g(x) = \frac{bx}{\sqrt{x^2+4}}, b > 0$$
- א. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.
- ב. הבע באמצעות b אסימפטוטות (אם יש כאלה) של הפונקציה $g(x)$ המקבילות לצירים.
- ג. הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בשתי נקודות בלבד. שרטט, במערכת צירים אחת, סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ד. נתון שאחת מנקודות החיתוך שבין הגרפים של שתי הפונקציות היא $x = 1$. כמו כן נתונה הפונקציה $h(x) = b\sqrt{x^2+4}$ המקיימת $h'(x) = g(x)$. חשב את ערכי הפרמטרים a ו- b אם נתון שהשטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ הוא $\frac{14}{3} - 2\sqrt{5}$.
7. נתונה הפונקציה $f(x) = 2 - \cos x - \sin^2 x$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$. עבור התחום הנתון ענה על סעיפים א'-ד':
- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
- ג. (1) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
(2) שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (הפונקציה $f(x)$ גזירה גם בקצות התחום הנתון).
(3) מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.
- ד. נתון כי גרף הפונקציה $g(x) = a - \cos x - \sin^2 x$ משיק לציר x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד. מהו הערך של a ? נמק.



8. הגרפים של הפונקציות $y = -x^2 + 1$ ו- $y = (a^2 - 1)x^2 - 1$ ($a > 1$) נחתכים בנקודות A ו-B. הנקודה O היא ראשית הצירים.
- א. מה צריך להיות הערך של a כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?
- ב. מצא את שיעורי הנקודה B עבורה השטח הני"ל מקסימלי.
- ג. נסמן ב- $f(x)$ את הפונקציה שמייצגת את שטח המשולש AOB כאשר $x = a$ ו- $a > 1$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x \neq 0$.

בהצלחה !

תשובון

1. 80 קמ"ש.

[חורף תשע"א 2011]

2. ב. $\frac{M}{T} = \frac{1-b^2}{b^2}$.

[קיץ תשע"ג 2013 מועד ב']

3. א. $\frac{1}{4}$. ב. 0.05. ג. 20%.

[בני גורן 581 ב-2 מתכונות מבחן 6]

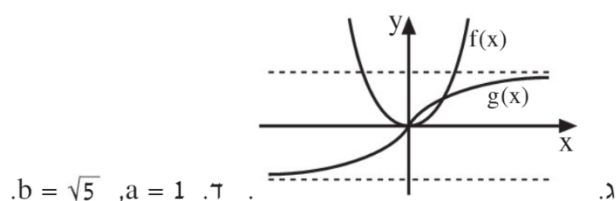
4. ב. 10 סמ"ר.

[בני גורן 581 ב-2 מתכונות מבחן 22]

5. א. 60° . ב. $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin(\alpha+60^\circ) \sin(\alpha+30^\circ)}$. ג. 38.21° .

[בני גורן 581 ב-2 מתכונות מבחן 12]

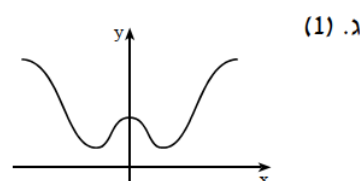
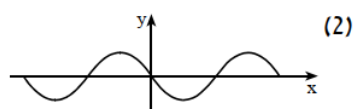
6. א. עולה לכל x . ב. $y = b$, $y = -b$.



[בני גורן 581 ב-2 מתכונות מבחן 3]

7. א. $(0;1)$. ב. $(\pi;3)$ מקסימום מוחלט, $(-\pi;3)$ מקסימום מוחלט.

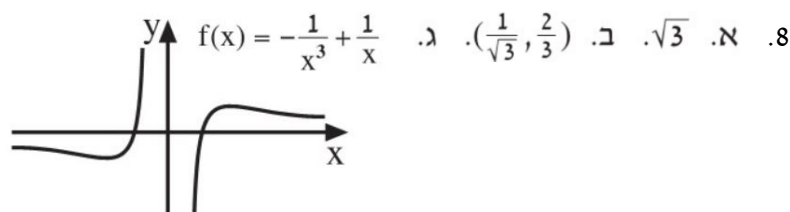
מינימום מוחלט, $(\frac{\pi}{3}; \frac{3}{4})$, מינימום מוחלט, $(-\frac{\pi}{3}; \frac{3}{4})$.



(3) $\frac{1}{2}$.

ד. $a = 1$.

[קיץ תש"ע 2010 מועד א']



[בני גורן 581 ב-2 מתכונות מבחן 26]