

מספרים מרוכבים

שאלה מס' 1

- המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z מקיים: $|z - 12 - 5i| = 7$.
- המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים $w = x + iy$ מקיים: $\arg(w) = 45^\circ$.
- ($\arg(w)$ היא הזווית בהצגה הקוטבית של w).
- המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים w חותך את המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z בנקודות B ו- C .
- א. סרטט באותה מערכת צירים סקיצות של שני המקומות הגאומטריים.
- ב. הנקודות B ו- C מייצגות במישור גאוס את המספרים המרוכבים z_1 ו- z_2 בהתאמה. מצא את $\arg(z_2 \cdot z_1)$.

שאלה מס' 2

- א. פתור את המשוואה: $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$, z הוא מספר מרוכב.
- ב. האם שלושה מן הפתרונות שמצאת בסעיף א נמצאים על המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים w השונים מ- 0 ומקיימים: $107^\circ < \arg(w) < 253^\circ$? נמק.

סיכומוצ'יק

צורתו הקרטזית של מספר מרוכב היא: $a + ib$ כאשר a ו- b הם מספרים ממשיים ו- $i \equiv \sqrt{-1}$.
חלק ממשי חלק מדומה

שני מספרים מרוכבים $a + ib$ ו- $c + id$ שווים אם ורק אם $a = c$ ו- $b = d$.
 נוכל לראות את המספרים הממשיים כתת-קבוצה של המרוכבים כאשר $b = 0$.

הערך המוחלט (r) של $a + ib$ מוגדר כ- $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

המספר הצמוד של $z = a + ib$ מוגדר כ- $a - ib$ ומסומן ב- $\bar{z}$.
 את פעולות החשבון במספרים מרוכבים מבצעים כמו באלגברה של מספרים ממשיים, כאשר נזכור ש: $i^2 = -1$.

הכפלה בצמוד חלקי עצמו (לשם חילוק מספר מרוכב במספר אחר):
 כאשר קיבלנו שבר ואנו רוצים לגלות איזה מספר מרוכב הוא מייצג נשתמש בשיטת ההכפלה של המונה והמכנה במספר הצמוד של המכנה: $\frac{(x - yi)}{(x - yi)}$. בכך לא נשנה את ערך הביטוי אך נפשט אותו.

ההצגה הקוטבית של מספרים מרוכבים
 כידוע, כל נקודה במישור הממשי ניתן לתאר ע"י זוג מספרים (x, y) הממוקמים במערכת צירים. בנוסף ניתן לתאר את הנקודה באמצעות מרחקה מהראשית r והזווית θ שיוצר הקו שמחבר את הנקודה לראשית עם הצד החיובי של ציר x . ניתן לראות ש- $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$. כלומר המספר המרוכב z יכול להיכתב כך: $z = x + iy = R(\cos \theta + i \sin \theta)$. כתיבה זו נקראת **הצורה הקוטבית (פולארית)** של המספר המרוכב R נקרא **הערך המוחלט** של המספר המרוכב, ואילו θ נקראת **הזווית/הארגומנט**.

מעבר מהצגה קרטזית להצגה קוטבית באמצעות צמד הנוסחאות: $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$.

חשוב מאד: המחשבון נותן זווית אחת המתאימה ל- $\tan \theta$, אולם יש אחת נוספת במרחק 180° . עלינו להסתכל על מיקום הנקודה (זווית ברמת הנישואים) ולבדוק להחליט מה הזווית המתאימה למספר המרוכב הישיר.

***משפט דה-מואבר:** (משפט המאפשר לחשב בקלות חזקות של מספר מרוכב):

$$Z^n = R^n [\cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta)] \quad \text{בהנתן המספר המרוכב } Z = r[\cos \theta + i \sin \theta] \text{ אז מתקיים}$$

שורשים מסדר n של מספר מרוכב

בהינתן המספר המרוכב $r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ואנו רוצים למצוא את n הפתרונות המקיימים: $Z^n = r[\cos \theta + i \sin \theta]$ נשתמש בנוסחה לחישוב השורשים ה- n ים השונים:

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 360k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 360k}{n} \right) \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \text{ (מציבים כל פעם } k \text{ אחר)}$$